裂纹反演分析的 NMM-Elman 神经网络协同方法

郑光耀,张慧华,韩尚宇,纪晓磊

(南昌航空大学土木建筑学院,330063 南昌)

摘　要:裂纹识别是结构健康监测的重要内容。本研究基于反演分析原理,将数值流形方法(NMM)与 Elman 神经网络相结合开展裂纹识别。NMM 用于获取对应裂纹构型下测点的位移数据以供 Elman 神经网络的学习,在此基础上利用训练好的 Elman 网络进行了直线裂纹反演。通过 2 个典型算例证实了 NMM-Elman 协同方法的可行性和精度,与此同时分析了测点布置方式及输入数据噪声等因素对裂纹反演精度的影响。表明本研究的方法能够准确反演出单一及复杂裂纹的裂尖坐标。本研究的工作为复杂裂纹的高效准确识别提供了一种新的思路和方法。

关键词:数值流形方法;Elman 神经网络;直线裂纹;反演分析

中图分类号:O34　　文献标志码:A

Crack inverse analysis with the NMM-Elman neural network collaborative method

ZHENG Guangyao,ZHANG Huihua,HAN Shangyu,JI Xiaolei

(School of Civil Engineering and Architecture,Nanchang Hangkong University,330063 Nanchang,China)

Abstract: Crack identification is an important issue in structural health monitoring. Based on the principle of inverse analysis, this paper combines the numerical manifold method (NMM) with the Elman neural network to carry out crack identification. To serve the learning of Elman neural network, the NMM is used to obtain the displacement data of measuring points under various crack configurations. On this basis, the trained Elman network is used for straight crack inversion. The feasibility and accuracy of NMM-Elman collaborative method are verified by two typical examples. At the same time, the effects of measuring point layout and input data noise on crack inversion accuracy are analyzed. The research shows that the method proposed in this paper can accurately reflect the crack tip coordinates of single and complex cracks. This work provides a new pathway for efficient and accurate detection of complex cracks.

Key words:numerical manifold method;Elman neural network;straight crack;inverse analysis

裂纹是结构体中常见的缺陷,其存在会对结构的可靠性产生不同程度的影响。在过去几十年中,已经发展了许多裂纹无损检测技术(如超声波技术、红外热成像技术、压电阻抗技术、CT 技术等),但其或多或少存在检测效率低、成本高、适用面窄、精度不佳等问题;此外,上述方法一般需预估裂纹的大体

收稿日期:2022-05-27　　**修回日期:**2022-07-10

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 12062015);江西省自然科学基金资助项目(No. 20212BAB211016)

通信作者:张慧华,教授。E-mail:hhzhang@nchu.edu.cn

引用格式:郑光耀,张慧华,韩尚宇,等. 裂纹反演分析的 NMM-Elman 神经网络协同方法[J]. 应用力学学报,2022,39(4):673-682.

ZHENG Guangyao,ZHANG Huihua,HAN Shangyu,et al. Crack inverse analysis with the NMM-Elman neural network collaborative method [J]. Chinese journal of applied mechanics,2022,39(4):673-682.

位置,导致测区有限而常出现漏检的情况,留下工程隐患。因此,发展和研究新型无损检测方法对结构体的健康监测和寿命维护具有重要意义。

近年来,数值计算工具和机器学习算法的飞速发展为缺陷检测提供了另一种路径。此类方法一般先通过数值仿真技术(如有限元法、扩展有限元法、等几何方法、比例边界元法等)进行正分析以获得结构体的受荷响应,在此基础上利用各类智能优化算法(如人工神经网络、遗传算法、粒子群优化、Jaya 算法等)对缺陷进行反演。文献[1]提出了一种基于红外热波技术、有限元与支持向量机相结合的复合材料缺陷检测方法。文献[2]将扩展有限元法和扩展等几何分析分别与粒子群优化和 Jaya 算法相结合,预测裂纹的位置。文献[3]将比例边界有限元法和机器学习算法相结合定量反演结构中的缺陷。作为新兴数值方法的代表,数值流形方法(numerical manifold method,NMM)因其特有的数学覆盖和物理覆盖系统已成为求解裂纹等不连续问题的利器。NMM 求解裂纹问题(即进行裂纹问题正分析)的主要优点包括[4-5]:数学覆盖可不与物理域的所有边界(含裂纹)一致;可自然描述穿越裂纹面时位移场的不连续;通过恰当选取覆盖函数可准确表征裂尖区物理场的局部特性。得益于以上优点,NMM 已被广泛应用于求解各类裂纹问题[6-10]。另外,Elman 神经网络是一种典型的反馈型人工神经网络,有较强的优化计算和联想记忆功能,可以看作是具有局部记忆元素和局部反馈连接的递归神经网络[11]。文献[12]将 Elman 神经网络用于缺陷检测,提出了一种三层结构的桥梁缺陷自动检测与识别方法。文献[13]提出了一种基于时间序列与 Elman 神经网络的大型、复杂空间桁架结构损伤检测方法。

至今,NMM 与智能算法相结合已有初步成果(如文献[14]结合 NMM 与蚁群算法研究了边坡稳定性),但其在裂纹反演分析方面的工作尚未见报道,本研究将 NMM 与 Elman 神经网络相结合用于裂纹识别,在探讨方法可行性和精度的基础上进一步分析测点布置、数据噪声等因素对网络预测能力的影响。

1 裂纹反演模型简介

裂纹反演是一类典型的反问题。这类问题是在结构某些关键点(即测点)的响应(如位移、应力和应变等)已知的情况下,通过反演算法获得与该结构有关的一些未知的物理或几何特性。

为探测结构中的裂纹几何信息,需要结合相关优化算法寻找合适的参数模型估计结构关键点的响应,并与结构真实响应进行比较,使得二者之间误差最小化[15],见图 1。

参数模型可通过下组向量表示为[15]

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \in \boldsymbol{R}^n \tag{1}$$

其中 n 为待反演参数个数。

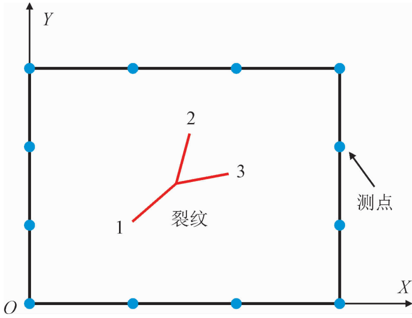


图 1 含裂纹结构及测点示意图

Fig. 1 Schematic diagram of structure with crack and the measuring points

图 1 中待反演的裂纹的参数为[15]

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{crack}} = \{X_{c1}, Y_{c1}, X_{c2}, Y_{c2}, X_{c3}, Y_{c3}\} \tag{2}$$

其中(X_{ci}, Y_{ci})为裂尖 i 坐标($i=1,2,3$)。

反演分析的目标函数为[15]

$$\boldsymbol{O}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum \frac{\|\boldsymbol{u}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{\alpha}) - \boldsymbol{u}^{\mathrm{m}}\|}{\|\boldsymbol{u}^{\mathrm{m}}\|} \tag{3}$$

其中:$\boldsymbol{u}^{\mathrm{c}}(\alpha)$和 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{m}}$ 分别为结构关键点响应量的估计值与真实值。

故对裂纹进行反演分析,即通过有关优化方法,在给定的结构体范围内,获取最优的参数向量[15],即

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \{\tilde{X}_{c1}, \tilde{Y}_{c1}, \tilde{X}_{c2}, \tilde{Y}_{c2}, \tilde{X}_{c3}, \tilde{Y}_{c3}\} \tag{4}$$

使得式(3)最小化。

2 NMM-Elman 神经网络方法

2.1 数值流形方法

2.1.1 NMM 简介

NMM 最初应用于岩体中节理和裂隙问题求解。该方法利用现代数学“流形”思想(即将许多个部分重叠的区域组合在一起,去覆盖全部材料体),采取 2 套有限覆盖体系(即数学覆盖和物理覆盖)统一求

解连续与非连续问题[16]。数学覆盖由许多数学分片组成,不必与物理域的边界(包括外部边界、内部裂纹、孔洞边界及材料界面等)保持一致,只须覆盖全部物理域即可;相互部分重叠的数学分片,在形状选择时亦不受约束;物理分片是由诸多数学分片与物理域的相交部分构成,其集合则构成物理覆盖;若干个物理分片的公共部分就形成流形单元(下文简称单元)。关于上述基本概念的更细致的介绍可参阅文献[17]。

2.1.2 裂纹位移场近似函数

基于上述概念,NMM 可将任意单元 e 的位移场近似函数表示为[18]

$$\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^{N}w_i(\boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{X}) \tag{5}$$

其中:$\boldsymbol{X}=(X,Y)$;N 为构成单元 e 的物理分片的个数;$w_i(\boldsymbol{X})$为各物理分片 P_i所对应的单位分解权函数,与生成 P_i的数学分片上定义的权函数相对应;$\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{X})$为定义在 P_i上的局部函数,对线弹性裂纹问题,常取为[18]

$$\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{b}_i \tag{6}$$

其中:$\boldsymbol{a}_i$ 和 $\boldsymbol{b}_i$ 分别为定义在 P_i上的常规未知量列阵和奇异未知量列阵;$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X})$为多项式基矩阵,即[18]

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}1&0&X&0&Y&0&\cdots&0\\0&1&0&X&0&Y&0&\cdots\end{bmatrix} \tag{7}$$

$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$是由裂尖渐近位移场提取出的基函数矩阵,对于二维问题,可表示为[19]

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}\Phi_1&0&\Phi_2&0&\Phi_3&0&\Phi_4&0\\0&\Phi_1&0&\Phi_2&0&\Phi_3&0&\Phi_4\end{bmatrix} \tag{8}$$

其中[19]

$$[\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4]=\left[\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2},\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2},\sqrt{r}\sin\theta\sin\frac{\theta}{2},\sqrt{r}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\right] \tag{9}$$

其中(r,θ)为裂尖局部坐标系中考察点的极坐标。

2.1.3 离散方程的建立

基于修正变分原理,可得到 NMM 求解线弹性裂纹问题的总体方程为[19]

$$\boldsymbol{KU}=\boldsymbol{F} \tag{10}$$

其中:$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 分别为总体刚度矩阵、总体未知量列阵和等效载荷列阵,具体形式见文献[17,19]。

2.2 Elman 神经网络

2.2.1 Elman 神经网络简介

Elman 神经网络由 Jeffrey Locke Elman 教授于 1990 年为解决语音处理问题而提出[20],是一种反馈型局部递归神经网络。该网络与传统 BP 神经网络的网络结构略有差异,除了基本的输入层、隐含层和输出层之外,还在隐含层中存在用于构建局部反馈的承接层,其拓扑结构如图 2 所示。承接层接收来自隐含层的反馈信号,每个隐含层节点都有与之相应的关联节点[11]。作为一种延时算子,承接层通过自身存储对前一时刻隐含层的输出进行延迟和记忆并反馈给隐含层。通过这种方式,Elman 神经网络对历史状态数据更具敏感性,具有强大的处理动态信息、实现动态反馈的能力。

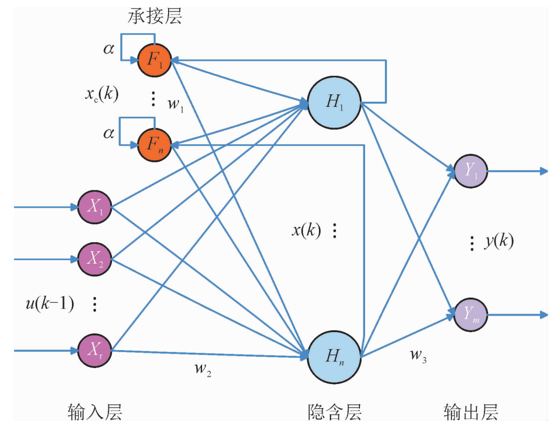


图 2 Elman 神经网络结构图

Fig. 2 Structure of Elman neural network

2.2.2 Elman 神经网络工作原理

基于图 2,用于描述 Elman 神经网络的非线性状态空间的表达式为[21]

$$y(k)=g[w_3x(k)+\beta_2] \tag{11}$$

$$x(k)=f[w_1x_c(k)+w_2(u(k-1))+\beta_1] \tag{12}$$

$$x_c(k)=\alpha x_c(k-1)+x(k-1) \tag{13}$$

式中:w_1 为隐含层与承接层间的权重;w_2 为隐含层与输入层间的权重;w_3 为输出层与隐含层间的权重;$y(k)$为输出层输出;$x(k)$即网络第 k 次迭代的隐含层输出;$x_c(k)$为网络第 k 次迭代的承接层输出;$u(k-1)$为第 $k-1$ 个输入数据;β_1、β_2 分别为输入层、隐含层偏置量;α 表示承接层自反馈系数;$f(*)$为隐含层的非线性激活函数,常采用 Sigmoid 函数[21],见式(14);$g(*)$为输出层的线性激活函数。

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}} \tag{14}$$

定义 Elman 神经网络的均方误差函数为[21]

$$E=\frac{1}{2}[y_{\mathrm{d}}(k)-y(k)]^{\mathrm{T}}[y_{\mathrm{d}}(k)-y(k)] \quad (15)$$

其中:E 为网络的误差函数;$y_{\mathrm{d}}(k)$ 为网络第 k 次迭代的期望输出;$y(k)$ 为第 k 次迭代的实际输出。

隐含层神经元个数 h 由经验公式(16)确定[22],即

$$h=\sqrt{m+n}+\xi \quad (\xi=1\sim10) \quad (16)$$

其中:m、n 分别为输入、输出节点个数;ξ 为 1 ~ 10 间可调节常数。选取 h 时一般采用试错法,即在备选值范围内找出使均方误差 E 最小的 h。

2.3 NMM-Elman 神经网络方法的实现

本研究将 NMM 与 Elman 神经网络算法相结合运用于裂纹反演分析。首先基于 NMM 获取含裂纹结构在外载作用下相关测点的位移值,然后将测点位移及对应的裂纹构型作为 Elman 神经网络的训练数据,并通过逐步修正各层权重等参数、调整网络结构以达到预期的预测效果,在此基础上进一步开展裂纹识别。该方法的主要实现流程如图 3 所示。

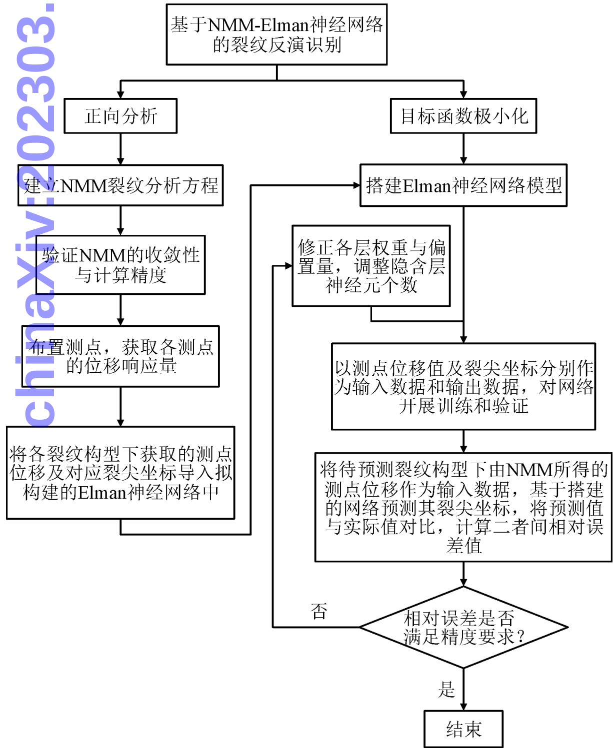


图 3　NMM-Elman 神经网络方法开展裂纹识别的流程图

Fig. 3　Flow chart of crack detection with NMM-Elman neural network method

3　算例分析

为验证 NMM-Elman 神经网络协同方法的可行性和精度,本节选取 2 个裂纹识别问题(中心水平裂纹和星形裂纹)进行探讨。计算时统一取杨氏模量 $E=1.0$ GPa,泊松比 $v=0.3$,且均按平面应变状态考虑。

3.1　矩形板内的中心水平裂纹识别

如图 4 所示,矩形板高 $2h=8.0$ m,宽 $2b=3.0$ m,板内含有一条长度为 $2a$ 的中心水平裂纹。板顶部受到 $\sigma=1.0$ MPa 的拉应力作用,板底边的竖向位移和底边左端的水平位移均为零。

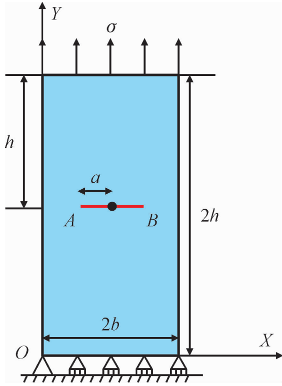


图 4　单向拉伸作用下含中心水平裂纹的矩形板

Fig. 4　A rectangular plate with a central horizontal crack under uniaxial tension

3.1.1　NMM 精度验证

对线弹性断裂力学问题,一般通过校核断裂参数的精度来验证方法的准确性。据此,此处重点考察应力强度因子的 NMM 仿真精度。

以裂尖 B 为例,根据文献[23],当 $h/b\geq1.5$ 时,裂尖应力强度因子 K_{I} 的计算公式为

$$K_{\mathrm{I}}=F\sigma\sqrt{\pi a} \quad (17)$$

其中 F 为有限宽度修正系数,本算例中取[23]

$$F=\frac{1-0.5\left(\frac{a}{b}\right)+0.326\left(\frac{a}{b}\right)^2}{\sqrt{1-\frac{a}{b}}} \quad (18)$$

NMM 模拟时,采用交互积分方法[24]求解裂尖应力强度因子。

1)收敛性测试

取 $a=0.5$ m,分别采用 3 种由正方形数学单元(数学单元边长 l 分别为 0.25 m、0.15 m、0.125 m)组成的数学覆盖对板进行离散,剖分后得到的单元数量分别为 432、1 086 和 1 632,相应的离散域见图 5,NMM 得到的 K_{I} 及对应的参考解列于表 1。可以发现随着覆盖的细化,NMM 解逐渐收敛于参考解。

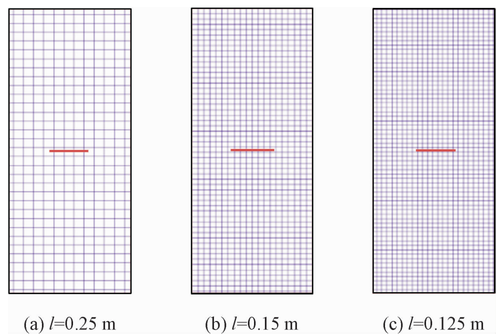


图 5　NMM 离散域

Fig. 5　NMM discretization

表 1　不同覆盖尺寸下的 K_I (单位:MPa · $m^{\frac{1}{2}}$)

Tab. 1　K_I at different cover size (unit:MPa · $m^{\frac{1}{2}}$)

NMM 解			参考解
432 单元	1 086 单元	1 632 单元	
1.323 4	1.331 7	1.333 9	1.334 4

2）裂纹长度取不同值时的计算精度

分别取 $a=0.3,0.4,0.5,\cdots,1.0$ m,并统一采用 $l=0.125$ m 对应的数学覆盖进行分析。图 6 给出了基于 NMM 求解的 K_I 结果及相应的参考解。可以看出 NMM 仿真值与参考解非常吻合,表明 NMM 模拟具有优良的精度。

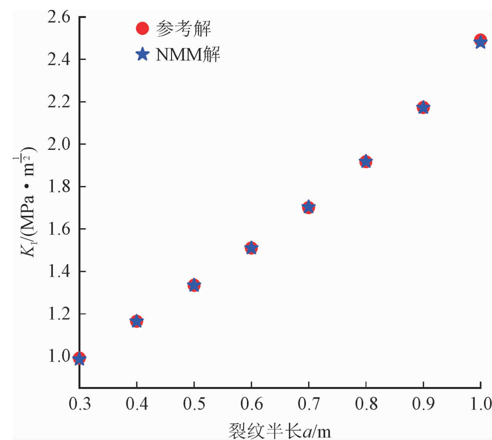


图 6　不同裂纹长度时的应力强度因子

Fig. 6　Stress intensity factors at various crack lengths

3.1.2　Elman 神经网络的训练和预测

1）网络的搭建和训练

在对 Elman 神经网络开展训练时,将各裂纹长度下对应的测点位移值作为输入数据,将裂尖 A、B 的坐标(即 X_A、Y_A、X_B 和 Y_B)作为输出数据。其中,测点的位移通过 NMM 正向分析获得。据此,采用 $l=0.125$ m 的数学覆盖先后对 $a=0.3,0.4,0.5,\cdots,1.2$ m 等 10 种情况进行模拟。初步按图 7 的方式布置 14 个测点,各测点的信息列于表 2。根据 2.2 节,Elman 神经网络的输入层和输出层的神经元数可确定为 14 个和 2 个,再根据式(16)并经过试算,取隐含层神经元数量为 4,最大训练次数为 1 000 次,训练的目标均方误差设置为 0.000 000 1,损失函数随训练次数的迭代收敛曲线见图 8,可发现在 332 次训练后满足误差要求。为判断网络的学习效果,首先采用已有训练数据对网络进行测试,相关结果列于表 3 和表 4,可发现预测值与真实值非常接近,表明搭建的网络具有良好的自学习能力。

表 2　测点坐标

Tab. 2　Coordinates of measuring points

编号	X 坐标	Y 坐标	编号	X 坐标	Y 坐标
1	0.000 00	1.333 33	8	2.000 00	8.000 00
2	0.000 00	2.666 66	9	3.000 00	8.000 00
3	0.000 00	4.000 00	10	3.000 00	6.666 66
4	0.000 00	5.333 33	11	3.000 00	5.333 33
5	0.000 00	6.666 66	12	3.000 00	4.000 00
6	0.000 00	8.000 00	13	3.000 00	2.666 66
7	1.000 00	8.000 00	14	3.000 00	1.333 33

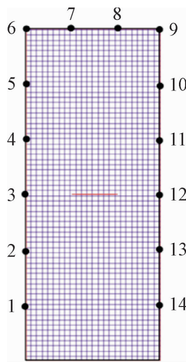


图 7　测点的布置

Fig. 7　Layout of measuring points

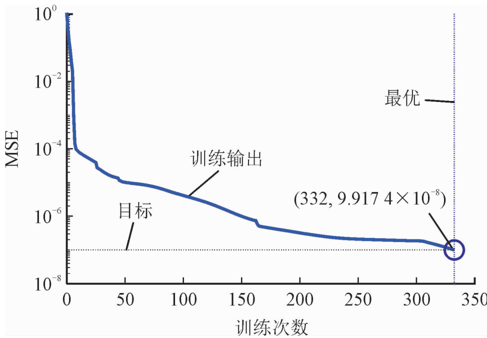


图 8　训练迭代收敛曲线

Fig. 8　Training iteration convergence curve

表 3　Elman 神经网络对裂尖 A 坐标的训练输出结果

Tab. 3　Training results of Elman neural network for crack tip A

裂纹半长 a/m	目标 X_A	训练输出 X_A	目标 Y_A	训练输出 Y_A
0.3	1.200 0	1.199 5	4.000 0	4.000 0
0.4	1.100 0	1.101 2	4.000 0	4.000 0
0.5	1.000 0	0.999 6	4.000 0	4.000 1
0.6	0.900 0	0.899 2	4.000 0	3.999 9
0.7	0.800 0	0.799 9	4.000 0	4.000 1
0.8	0.700 0	0.701 0	4.000 0	4.000 0
0.9	0.600 0	0.599 8	4.000 0	3.999 9
1.0	0.500 0	0.499 7	4.000 0	4.000 0
1.1	0.400 0	0.400 1	4.000 0	4.000 0
1.2	0.300 0	0.300 1	4.000 0	4.000 0

表 4　Elman 神经网络对裂尖 B 坐标的训练输出结果

Tab. 4　Training results of Elman neural network for crack tip B

裂纹半长 a/m	目标 X_B	训练输出 X_B	目标 Y_B	训练输出 Y_B
0.3	1.800 0	1.800 5	4.000 0	4.000 0
0.4	1.900 0	1.898 8	4.000 0	4.000 0
0.5	2.000 0	2.000 4	4.000 0	3.999 9
0.6	2.100 0	2.100 7	4.000 0	4.000 1
0.7	2.200 0	2.200 0	4.000 0	3.999 9
0.8	2.300 0	2.299 0	4.000 0	4.000 0
0.9	2.400 0	2.400 2	4.000 0	4.000 1
1.0	2.500 0	2.500 3	4.000 0	3.999 9
1.1	2.600 0	2.599 9	4.000 0	4.000 0
1.2	2.700 0	2.699 9	4.000 0	4.000 0

2）测点布置对预测结果的影响

测点布置方案：方案 1，布置如图 7 所示 14 个测点；方案 2，布置除 6、9 外 12 个测点；方案 3，布置除 1、14 外 12 个测点；方案 4，布置除 3、6、9、12 外 10 个测点；方案 5，布置除 1、2、13、14 外 10 个测点；方案 6，布置除 1、3、6、9、12、14 外 8 个测点。

并取 $a = 0.3, 0.4, 0.5, \cdots, 1.2$ m 等 10 种情形下测点的位移作为输入数据对网络进行训练，在此基础上，将 $a = 1.3$ m 时的测点位移值作为网络的输入数据以预测裂尖 A、B 的位置。为合理确定各测点布置方案下隐含层神经元的个数，在搭建 Elman 神经网络时，进行了反复试算，结果表明，当隐含层神经元个数均取 4 时，各方案下的预测误差相对最低。相关的预测结果见表 5 ~ 表 6。可以看出，测点的布置对 Y_A、X_B 和 Y_B 的预测精度影响很小，对 X_A 的影响则较明显，这可能与裂尖 A 距离板左下角点的距离较近而该点施加了 X 向的位移约束有关。进一步观察表 5 和表 6 还可发现，在 6 种布置方案中，方案 1 的误差最小。

表 5　各测点方案下裂尖 A 的坐标预测输出

Tab. 5　Coordinate prediction output of crack tip A under different measuring-point layouts

方案	目标 X_A	预测 X_A	相对误差/%	目标 Y_A	预测 Y_A	相对误差/%
1	0.200 0	0.196 0	2.000	4.000 0	4.000 0	0.000
2		0.195 3	2.350		3.996 9	0.077
3		0.188 9	5.550		3.999 5	0.013
4		0.204 9	2.450		4.000 0	0.000
5		0.191 1	4.450		3.999 1	0.023
6		0.204 6	2.300		4.000 2	0.005

表 6　各测点方案下裂尖 B 的坐标预测输出

Tab. 6　Coordinate prediction output of crack tip B under different measuring-point layouts

方案	目标 X_B	预测 X_B	相对误差/%	目标 Y_B	预测 Y_B	相对误差/%
1	2.800 0	2.804 0	0.143	4.000 0	4.000 2	0.005
2		2.805 3	0.189		4.002 7	0.067
3		2.811 1	0.396		4.000 4	0.010
4		2.795 1	0.175		3.999 9	0.003
5		2.809 1	0.325		4.000 9	0.022
6		2.795 4	0.164		3.999 8	0.005

3）输入数据噪声对预测精度的影响

为探索 Elman 神经网络的容噪能力，对由 NMM 模拟获得的测点位移值添加噪声，即[25]

$$\varphi_{\text{Input}} = \varphi_{\text{NMM}}(1 + \rho) \tag{19}$$

其中：φ_{Input} 为 Elman 神经网络的输入数据（即添加噪声后的测点位移值）；φ_{NMM} 为 NMM 仿真得到的测点原始位移值；ρ 为噪声强度。

网络训练仍考虑 $a = 0.3, 0.4, 0.5, \cdots, 1.2$ m 等 10 种裂纹构型，预测时则将 $a = 1.3$ m 的含噪声的测点位移值（按前述方案 1 布置测点，隐含层神经元取 4）作为输入数据。图 9 给出了 ρ 分别取 0%、1%、2%、5% 和 10% 时各裂尖坐标预测的相对误差绝对值随噪声值的变化情况。可以看出，裂尖坐标预测值的相对误差随噪声值的提升逐渐增大。此外，还

可发现 X_A 对噪声最为敏感,这可能与裂尖 A 的位置及约束条件有关;另外,当噪声值为 1% 时,X_A 的相对误差较无噪声时更小,这一现象可能与网络陷入局部最优有关。当噪声值不超过 5% 时,在大部分情况下各坐标的预测相对误差均小于 1%,表明搭建的 Elman 神经网络具有很好的容噪能力。

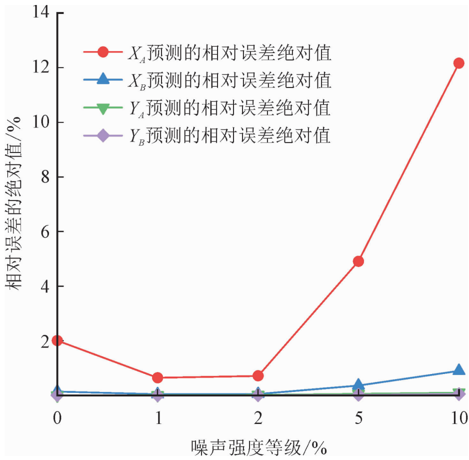


图 9 不同噪声下裂尖坐标预测的相对误差绝对值

Fig. 9 Absolute relative errors of the predicted crack tip coordinates under different noises

3.2 方板内的星形裂纹识别

考察图 10 所示含星形裂纹的方板。板宽 $2W=4.0$ m,各分支裂纹长度均为 a,相邻分支间的夹角皆为 60°,承受大小 $\sigma=1.0$ MPa 的双向均匀拉伸荷载作用,板底边的竖向位移和底边左端的水平位移均为零。

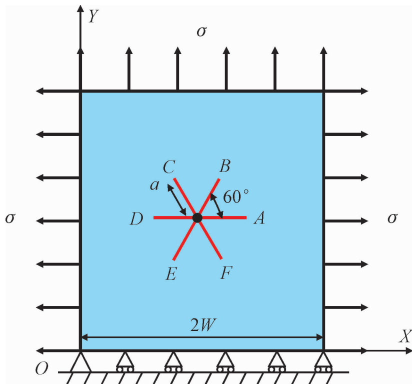


图 10 双向拉伸荷载作用下含星形裂纹的方板

Fig. 10 A square plate with a star-shaped crack under bi-axial tension

3.2.1 NMM 精度验证

鉴于对称性,仅考察裂尖 A 和 B 的应力强度因子值 $K_{\mathrm{I}A}$, $K_{\mathrm{I}B}$, $K_{\mathrm{II}B}$ 的计算精度。分别取 $a=0.2W$, $0.3W$, …, $0.6W$,使用边长 $l=0.083$ m 的正方形数学单元组成的数学覆盖对物理域进行剖分,NMM 仿真得到的应力强度因子解与对应的参考解[26]列于表 7,可以看出,NMM 解与参考解吻合度较高。

表 7 裂纹长度 a 取不同值时的应力强度因子

Tab. 7 Stress intensity factors at different crack length a

K 值/ ($\mathrm{MPa \cdot m^{\frac{1}{2}}}$)	裂纹长度 a/m				
	$0.2W$	$0.3W$	$0.4W$	$0.5W$	$0.6W$
$K_{\mathrm{I}A}$(NMM)	0.856 7	1.073 3	1.288 0	1.518 3	1.798 0
$K_{\mathrm{I}A}$(参考解)	0.848 6	1.077 2	1.308 7	1.568 9	1.894 7
$K_{\mathrm{I}B}$(NMM)	0.863 7	1.105 0	1.363 2	1.671 3	2.078 5
$K_{\mathrm{I}B}$(参考解)	0.849 5	1.082 4	1.326 1	1.610 7	1.976 9
$K_{\mathrm{II}B}$(NMM)	0.000 6	0.001 9	0.007 6	0.023 7	0.057 7
$K_{\mathrm{II}B}$(参考解)	0.000 5	0.003 1	0.011 1	0.029 8	0.065 6

3.2.2 Elman 神经网络的搭建和训练

1) 网络的训练

搭建 Elman 神经网络时依次取 $a=0.40\sqrt{3}$ m, $0.42\sqrt{3}$ m, $0.44\sqrt{3}$ m, …, $0.58\sqrt{3}$ m 等 10 种情形,仍然将 NMM 模拟得到的测点位移值作为网络的输入数据,裂尖 A、B、C、D、E、F 的坐标值作为输出数据。在 NMM 仿真时均取 $l=0.083$ m(图 11 给出了 $a=0.50\sqrt{3}$ m 的离散域,单元数为 2 476),布置 12 个测点如图 11 所示。由此,网络的输入层、隐含层和输出层的神经元个数分别为 12、7(由试算得出)和 6,设置最大训练次数为 1 000 次,训练的目标均方误差为 0.000 000 1,损失函数随训练次数的迭代收敛曲线见图 12。可知,在迭代 299 次后训练满足误差要求。随后采用训练数据对网络进行测试,表 8 ~ 表 9 分别列出了裂尖 A、B 的预测结果,表明搭建的 Elman神经网络具有很好的自学习特性。

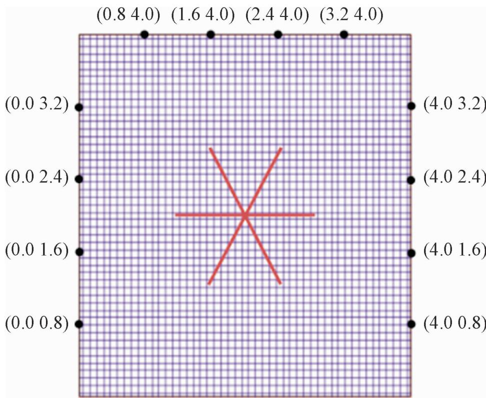


图 11 NMM 离散域及测点布置($a=0.50\sqrt{3}$ m)

Fig. 11 NMM discretization and measuring points layout when $a=0.50\sqrt{3}$ m

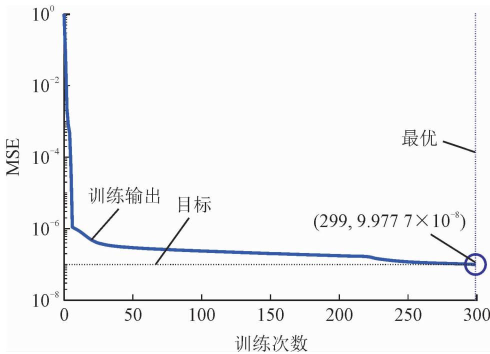


图 12　训练迭代收敛曲线

Fig. 12　Training iteration convergence curve

表 8　Elman 神经网络对裂尖 A 坐标的训练输出结果

Tab. 8　Training results of Elman neural network for crack tip A

裂纹长度 a/m	目标 X_A	训练输出 X_A	目标 Y_A	训练输出 Y_A
$0.40\sqrt{3}$	2.692 8	2.692 8	2.000 0	1.999 9
$0.42\sqrt{3}$	2.727 5	2.727 4	2.000 0	2.000 1
$0.44\sqrt{3}$	2.762 1	2.762 3	2.000 0	2.000 0
$0.46\sqrt{3}$	2.796 7	2.796 8	2.000 0	2.000 0
$0.48\sqrt{3}$	2.831 4	2.831 2	2.000 0	1.999 9
$0.50\sqrt{3}$	2.866 0	2.866 3	2.000 0	1.999 9
$0.52\sqrt{3}$	2.900 7	2.900 4	2.000 0	2.000 1
$0.54\sqrt{3}$	2.935 3	2.935 4	2.000 0	1.999 9
$0.56\sqrt{3}$	2.969 9	2.970 0	2.000 0	2.000 0
$0.58\sqrt{3}$	3.004 6	3.004 6	2.000 0	2.000 0

表 9　Elman 神经网络对裂尖 B 坐标的训练输出结果

Tab. 9　Training results of Elman neural network for crack tip B

裂纹长度 a/m	目标 X_B	训练输出 X_B	目标 Y_B	训练输出 Y_B
$0.40\sqrt{3}$	2.346 4	2.346 4	2.600 0	2.600 0
$0.42\sqrt{3}$	2.363 7	2.363 7	2.630 0	2.629 9
$0.44\sqrt{3}$	2.381 1	2.381 1	2.660 0	2.660 1
$0.46\sqrt{3}$	2.398 4	2.398 3	2.690 0	2.690 0
$0.48\sqrt{3}$	2.415 7	2.415 6	2.720 0	2.719 8
$0.50\sqrt{3}$	2.433 0	2.433 1	2.750 0	2.750 3
$0.52\sqrt{3}$	2.450 3	2.450 3	2.780 0	2.779 8
$0.54\sqrt{3}$	2.467 7	2.467 7	2.810 0	2.810 1
$0.56\sqrt{3}$	2.485 0	2.484 9	2.840 0	2.839 9
$0.58\sqrt{3}$	2.502 3	2.502 3	2.870 0	2.870 0

2)网络的预测精度

分别取 $a=0.60\sqrt{3}$ m 和 $a=0.62\sqrt{3}$ m,基于已搭建完成的 Elman 神经网络,将 NMM 得到的测点位移作为输入值以预测裂尖坐标,相应的结果列于表 10 和表 11。可以看出,对所有裂尖,预测的相对误差最大值均不超过 0.2%,表明搭建的 Elman 神经网络具有较高的泛化能力。

表 10　Elman 神经网络对裂尖坐标的预测值和相对误差($a=0.60\sqrt{3}$ m)

Tab. 10　Prediction and relative error of Elman neural network for crack-tip coordinates ($a=0.60\sqrt{3}$ m)

裂尖	坐标	目标值	预测值	相对误差/%
A	X_A	3.039 2	3.041 5	0.076
	Y_A	2.000 0	2.000 2	0.011
B	X_B	2.519 6	2.520 4	0.032
	Y_B	2.900 0	2.900 7	0.023
C	X_C	1.480 4	1.479 8	0.043
	Y_C	2.900 0	2.900 2	0.008
D	X_D	0.960 8	0.960 0	0.080
	Y_D	2.000 0	1.999 8	0.010
E	X_E	1.480 4	1.479 4	0.065
	Y_E	1.100 0	1.099 4	0.059
F	X_F	2.519 6	2.520 5	0.037
	Y_F	1.100 0	1.099 5	0.044

表 11　Elman 神经网络对裂尖坐标的预测值和相对误差($a=0.62\sqrt{3}$ m)

Tab. 11　Prediction value and relative error of Elman neural network for crack-tip coordinates ($a=0.62\sqrt{3}$ m)

裂尖	坐标	目标值	预测值	相对误差/%
A	X_A	3.073 9	3.075 6	0.056
	Y_A	2.000 0	1.999 7	0.015
B	X_B	2.536 9	2.537 2	0.012
	Y_B	2.930 0	2.928 7	0.046
C	X_C	1.463 1	1.462 5	0.036
	Y_C	2.930 0	2.928 1	0.066
D	X_D	0.926 1	0.926 4	0.031
	Y_D	2.000 0	1.999 6	0.018
E	X_E	1.463 1	1.462 6	0.031
	Y_E	1.070 0	1.071 5	0.138
F	X_F	2.536 9	2.537 6	0.026
	Y_F	1.070 0	1.071 2	0.115

进一步探讨输入数据噪声对预测结果的影响。图 13 ~ 图 14 分别给出了噪声值依次为 0%、1%、

2%、5%和10%时，Elman 神经网络对真实裂纹 a 取 $0.60\sqrt{3}$ m 和 $0.62\sqrt{3}$ m 的反演结果。不难发现，网络预测的误差随噪声强度等级的提升而增大；此外，对所取的噪声强度，预测相对误差绝对值保持在 8%以内，且绝大部分低于 2%，说明网络容噪性能好，稳定性强，个别裂尖误差稍大（如 X_D 和 Y_F）的结果可能与裂纹的位置及约束情况有关。整体而言，搭建的网络模型可以满足预测要求。

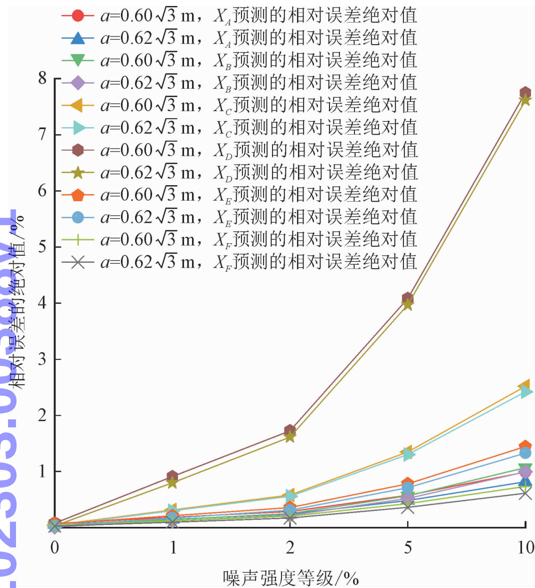


图 13　不同噪声下 X 坐标预测值的相对误差绝对值

Fig. 13　Absolute value of relative error of X-coordinate prediction under different noises

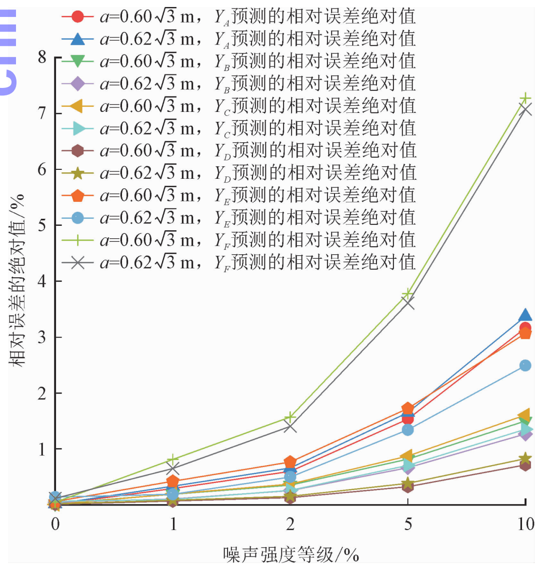


图 14　不同噪声下 Y 坐标预测值的相对误差绝对值

Fig. 14　Absolute value of relative error of Y-coordinate prediction under different noises

4　结　论

双重覆盖系统的引入使得数值流形方法可高精度便捷地模拟各类裂纹问题，承接层的存在则确保了 Elman 神经网络的自学习性和泛化能力。NMM 可在固定数学覆盖上求解连续变化的裂纹问题的优点，很好地迎合了 Elman 神经网络对训练数据获取的精度及效率的需求。据此，本研究发展了用于线弹性体内部直线裂纹反演分析的 NMM-Elman 神经网络协同方法，给出了两者的协同方式，通过 2 个典型算例验证了方法的精度和鲁棒性，并探讨了测点布置、输入数据噪声等对预测精度的影响，结果表明，本研究的方法具有很好的裂纹反演能力。

为了便于与已有文献中的参考解对照，本研究的 2 个算例均选用了对称裂纹，实际上，本研究的方法同样适用于非对称直线裂纹的反演。同时，本研究的分析对象为静止直裂纹，后期将进一步围绕曲裂纹、动态裂纹等更复杂的问题开展进一步研究。此外，在分析数据噪声对 Elman 神经网络的影响时，本研究对所有测点数据采用了一致的噪声值，后期还将围绕更符合实际的随机噪声的影响开展相关工作。

参考文献：

[1] 周建民，陈超，涂文兵，等. 红外热波技术、有限元与 SVM 相结合的复合材料分层缺陷检测方法[J]. 仪器仪表学报，2020，41(3)：29-38.
ZHOU Jianmin, CHEN Chao, TU Wenbing, et al. Composite layer defect detection method based on infrared heat wave technology, finite element and SVM[J]. Chinese journal of scientific instrument, 2020, 41(3): 29-38 (in Chinese).

[2] KHATIR S, WAHAB M A. A computational approach for crack identification in plate structures using XFEM, XIGA, PSO and Jaya algorithm[J]. Theoretical and applied fracture mechanics, 2019, 103: 102240.

[3] 赵林鑫，江守燕，杜成斌. 基于 SBFEM 和机器学习的薄板结构缺陷反演[J]. 工程力学，2021(6)：36-46.
ZHAO Linxin, JIANG Shouyan, DU Chengbin. Flaws Detection in thin plate structures based on SBFEM and machine learning[J]. Engineering mechanics, 2021(6): 36-46 (in Chinese).

[4] ZHANG H H, LIU S M, HAN S Y, et al. Computation of T-stresses for multiple-branched and intersecting cracks with the numerical manifold method[J]. Engineering analysis with boundary elements, 2019, 107: 149-158.

[5] ZHANG H H, LIU S M, HAN S Y, et al. The numerical manifold method for crack modeling of two-dimensional functionally graded

materials under thermal shocks[J]. Engineering fracture mechanics,2019,208:90-106.

[6] YANG Y T, XU D D, SUN G H, et al. Modeling complex crack problems using the three-node triangular element fitted to numerical manifold method with continuous nodal stress[J]. Science China technological sciences,2017,60(10):1537-1547.

[7] ZHANG H H,LIU S M,HAN S Y,et al. Modeling of 2D cracked FGMs under thermo-mechanical loadings with the numerical manifold method[J]. International journal of mechanical sciences, 2018,148:103-117.

[8] ZHENG H,YANG Y T,SHI G H. Reformulation of dynamic crack propagation using the numerical manifold method[J]. Engineering analysis with boundary elements,2019,105:279-295.

[9] WU J,WANG Y X,CAI Y C,et al. Direct extraction of stress intensity factors for geometrically elaborate cracks using a high-order Numerical Manifold Method[J]. Engineering fracture mechanics, 2020,230:106963.

[10] ZHANG H H,JI X L,HAN S Y,et al. Determination of T-stress for thermal cracks in homogeneous and functionally graded materials with the numerical manifold method[J]. Theoretical and applied fracture mechanics,2021,113:102940.

[11] HUANG Y S,WANG H W,LIU H,et al. Elman neural network optimized by firefly algorithm for forecasting China's carbon dioxide emissions[J]. Systems science & control engineering,2019,7(2): 8-15.

[12] ESLAM M A, OSAMA M, MOHAMED M, et al. Hybrid Elman Neural network and an invasive weed optimization method for bridge defect recognition[J]. Transportation research record,2021, 2675(3):167-199.

[13] 任宜春,赵大淼. 基于时间序列与 ELMAN 神经网络的结构损伤识别[J]. 长沙理工大学学报(自然科学版),2015,12(4): 56-62.
REN Yichun,ZHAO Damiao. Damage identification of space truss structures based on time series and ELMAN neural network[J]. Journal of Changsha University of Science and Technology(natural science),2015,12(4):56-62(in Chinese).

[14] YANG Y T,WU W A,ZHANG J H,et al. Determination of critical slip surface and safety factor of slope using the vector sum numerical manifold method and MAX-MIN ant colony optimization algorithm[J]. Engineering analysis with boundary elements,2021,127: 64-74.

[15] 江守燕,杜成斌. 基于扩展有限元的结构内部缺陷(夹杂)的反演分析模型[J]. 力学学报,2015,47(6):1037-1045.
JIANG Shouyan,DU Chengbin. Back analysis model of internal defects (inclusions) based on extended finite element method[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics, 2015, 47 (6):1037-1045(in Chinese).

[16] 裴觉民. 数值流形方法与非连续变形分析[J]. 岩石力学与工程学报,1997(3):80-93.
PEI Juemin. Numerical manifold method and discontinuous deformation analysis[J]. Chinese journal of rock mechanics and engineering,1997(3):80-93(in Chinese).

[17] 刘思敏,张慧华,韩尚宇,等. 基于数值流形方法和交互积分法的平面裂纹 T 应力求解[J]. 应用力学学报,2021,38(1): 113-120.
LIU Simin,ZHANG Huihua,HAN Shangyu et al. Calculation of T-stress for planar cracks with the numerical manifold method and the interaction integral method[J]. Chinese journal of applied mechanics,2021,38(1):113-120(in Chinese).

[18] MA G W,AN X M,ZHANG H H,et al. Modeling complex crack problems using the numerical manifold method[J]. International journal of fracture,2009,156:21-35.

[19] ZHANG H H,LI L X,AN X M,et al. Numerical analysis of 2-D crack propagation problems using the numerical manifold method [J]. Engineering analysis with boundary elements,2009,34(1): 41-50.

[20] ELMAN J L. Finding structure in time[J]. Cognitive science, 1990,14(2):179-211.

[21] SUN X Y,GONG S J,HAN G,et al. Pruning Elman neural network and its application in bolt defects classification[J]. International journal of machine learning and cybernetics,2019,10(7):1-16.

[22] 沈花玉,王兆霞,高成耀,等. BP 神经网络隐含层单元数的确定[J]. 天津理工大学学报,2008(5):13-15.
SHEN Huayu, WANG Zhaoxia, GAO Chengyao, et al. Determination of hidden layer unit number of BP neural network[J]. Journal of Tianjin University of Technology,2008(5):13-15(in Chinese).

[23] 中国航空研究院. 应力强度因子手册[M]. 北京:科学出版社,1993.

[24] ZHANG H H,ZHANG S Q. Extract of stress intensity factors on honeycomb elements by the numerical manifold method[J]. Finite elements in analysis & design,2012,59:55-65.

[25] 王佳萍,杜成斌,王翔,等. 基于 XFEM 和改进人工蜂群算法的结构内部缺陷反演[J]. 工程力学,2019,36(9):25-31.
WANG Jiaping,DU Chengbin,WANG Xiang,et al. Inverse analysis of internal defects in structures using extended finite element method and improved artificial bee colony algorithm[J]. Engineering mechanics,2019,36(9):25-31(in Chinese).

[26] CHEUNG Y K,WOO C W,WANG Y H. A general method for multiple crack problems in a finite plate[J]. Computational mechanics,1992,10(5):335-343.

(编辑 李坤璐)